

Лекция 12. Анықталмаған интеграл. Алғашқы функция.

Анықтама. Егер $x \in (a, b)$ аралығында берілген $f(x)$ функциясы үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a, b) аралығындағы **алғашқы функциясы** деп аталады. Басқаша айтқанда, берілген функцияның алғашқы функциясын табу – оның туындысын табуға кері есеп болып саналады.

C – кез келген тұрақты шама (константа), яғни кез келген сан болсын. Егер $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы $F(x)$ болса, онда $F(x) + C$ функциясы да оның алғашқы функциясы болады, себебі $[F(x) + C]' = [F(x)]' = f(x)$. $F(x) + C$ функциясы $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларын анықтайды.

Анықтама. Егер $F'(x) = f(x)$ болса, онда $F(x) + C$ функциясын $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы дейді және ол $\int f(x)dx$ символымен белгіленеді.

Сонымен, $\int f(x)dx = F(x) + C$ мұндағы $\int$ – интеграл белгісі, dx – x айнымалысының дифференциалы, $f(x)dx$ – интеграл астындағы өрнек. Берілген функцияның анықталмаған интегралын табу жолын осы функцияны интегралдау дейді.

Анықталмаған интегралдардың қасиеттері

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int k f(x)dx = k \int f(x)dx$, мұндағы k – кез келген сан.
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
5. $\int dF(x) = F(x) + C$, мұндағы C – кез келген сан.

Практикада интегралдау үшін келесі интегралдар кестесін жатқа білген жөн.

Анықталмаған интегралдардың негізгі кестесі

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$

Дербес жағдайда, $\int e^x dx = e^x + C.$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$

11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C \quad (a > 0).$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$
 $(a > 0).$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

16. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

17. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

$$9. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Кестедегі кез келген интегралды тексеру үшін теңдіктің оң жағынан туынды алу керек.

Интегралдаудың негізгі әдістері

1. Анықталмаған интегралда айнымалыларды алмастыру. Айнымалыны алмастыру әдісі мына формулаға негізделген

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (12.1)$$

Мұндағы $x = \varphi(t)$ - берілген аралықта дифференциалданатын функция. Тиімді табылған айнымалыны алмастыру формуласы берілген интегралды жеңіл интегралдайтын интегралға, ал кейбір жағдайларда таблицалық интегралға келтіреді.

1-мысал. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1}$ интегралын табу керек.

Ол үшін $2x+1 = t^2$ алмастыруын жасаймыз. Сонда $x = \frac{t^2-1}{2}$ болады.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1} &= \left| x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = \left(\frac{t^2-1}{2} \right)' dt = t dt \right| = \int \frac{t dt}{t+1} = \\ &= \int \frac{(t+1)-1}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = t - \ln|t+1| + C = \left| t = \sqrt{2x+1} \right| = \sqrt{2x+1} - \ln|\sqrt{2x+1}+1| + C. \end{aligned}$$

Мұнда интегралдаудың соңында бастапқы x - айнымалысына көшу керек.

2. Дифференциал астына енгізу әдісі. Бұл әдіс айнымалыны ауыстыру сияқты жиі қолданылады. Интеграл астындағы функцияның көбейткіштерінің біреуін d белгісінің астына жазамыз да, оны жаңа айнымалы ретінде қарастырамыз. Еске сала кетейік, $u'(x)$ функциясын dx таңбасының астына жазғанда d таңбасынан кейін функцияның алғашқы функциясы жазылады, яғни $u'(x)dx = du(x)$.

Салдар. Айталық $y = f(u)$ үзіліссіз және $u = u(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функциялар болсын, онда

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du \quad (12.2)$$

2-мысал. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x) \frac{1}{x} dx = \int \ln x d \ln x = \left| \ln x = u \right| = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$. Бұл формулада d

таңбасының астына $\frac{1}{x}$ функциясын енгізіп $\ln x$ деп жаздық. Модуль таңбасын қолданбаса да болады, себебі

интеграл астындағы функция тек $x > 0$ болғанда анықталады. Дифференциал таңбасы астында кез келген функцияның алғашқы функциясына тұрақтыны қосып пайдалануға болады.

3-мысал. $\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx^2 = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left| x^2+1 = u \right| = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$.

3. Бөліктеп интегралдау әдісі. Айталық, $u = u(x), v = v(x)$ -дифференциалданатын функциялар болсын. Онда $d(u \cdot v) = u dv + v du$ теңдігі орындалады. Немесе $u dv = d(u \cdot v) - v du$. Осы теңдіктің екі жағынан интеграл алайық, сонда $\int u dv = \int d(u \cdot v) - \int v du$. Осыдан

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (12.3)$$

формуласын аламыз. (12.3) формуласын **бөліктеп интегралдау формуласы** дейді. Кейбір жағдайда бөліктеп интегралдау формуласын қолдану арқылы берілген интегралды алғашқыға қарағанда анағұрлым жеңіл алынатын интегралға келтіруге болады.

$$4\text{-мысал.} \quad \int \arctg x dx = \left| \begin{array}{l} \arctg x = u, \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$5\text{-мысал.} \quad \int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$